Ασκήσεις φυλλαδίου 3.

Άσκηση 1)

$f: [2,6] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [2,6] \cap \mathbb{Q} \\ 8, & x \in [2,6] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$

Να δ.ο. $\overline{\int_2^6} f(x)dx = 32$, $\underline{\int_2^6} f(x)dx = 12$.

Λύση

Έστω $P = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$, $x_0 = 2$, $x_n = 6$

τυχαία διαμέριση του $[2,6]$

$m_i = \inf\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\quad i = 1, \dots, n$

$M_i = \sup\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Επειδή $f(t) \geq 3,\ \forall t$

$\boxed{m_i \geq 3}$, $\forall i = 1, \dots, n$

Για κάθε $i = 1, \dots, n$ από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς υπάρχει q ρητός με: $t_{i-1} < q < t_i$

Άρα $m_i \leq f(q) = 3$: $m_i \leq 3$

Συνεπώς $m_i = 3$ $\forall i = 1, \dots, n$

Ακριβώς με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι $M_i = 8$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = 3 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= 3(x_n - x_0)$$

$$= 3(6 - 2)$$

$$= 12$$

NO DATE

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= 8 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= 8 \cdot 4 = 32$$

Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P) : P$ διαμ. του $[2,6]\}$

$$= \sup\{12\} = 12.$$

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,P) : P$ διαμ. του $[2,6]\}$

$$= \inf\{32\} = 32.$$

Άρα η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη

<u>Άσκηση 2)</u>

Η $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ και $\forall\, t,s \in [a,b]$ με $t<s$: $(\exists)\, x \in (t,s)$ με $f(x) = 0$ (*)

να δ.ο.: $\int_a^b f(x)dx = 0$

<u>Λύση</u>

$\Downarrow$

Εφόσον η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη

$\int_0^B f(x)dx = \underline{\int_0^B} f(x)dx = \int_0^B f(x)dx$

Έστω $P=\{x_0<x_1<x_2<\dots<x_n\}$ τυχαία διαμ. του $[0,B]$, $x_0 = 0$, $x_n = B$

Για κάθε $i=1,\dots,n$:

$m_i=\inf\{f(t),\ t\in[x_{i-1},x_i]\}$

Εφόσον $f(t)\geq 0\ \forall t$, προκύπτει ότι $m_i\geq 0$.

Από την υπόθεση (*) (στην εκφώνηση) για $t=x_{i-1},\ s=x_i$ $(\exists)$: $y\in(t,s)$: $f(y)=0$

άρα $m_i\leq 0$. Συνεπώς $m_i=0$.

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=0$

Άρα $\underline{\int_0^B} f(x)dx=\sup\{L(f,P): P \text{ διαμ. του } [0,B]\}$

$=\sup\{0\}=0.$

Άσκηση 3)

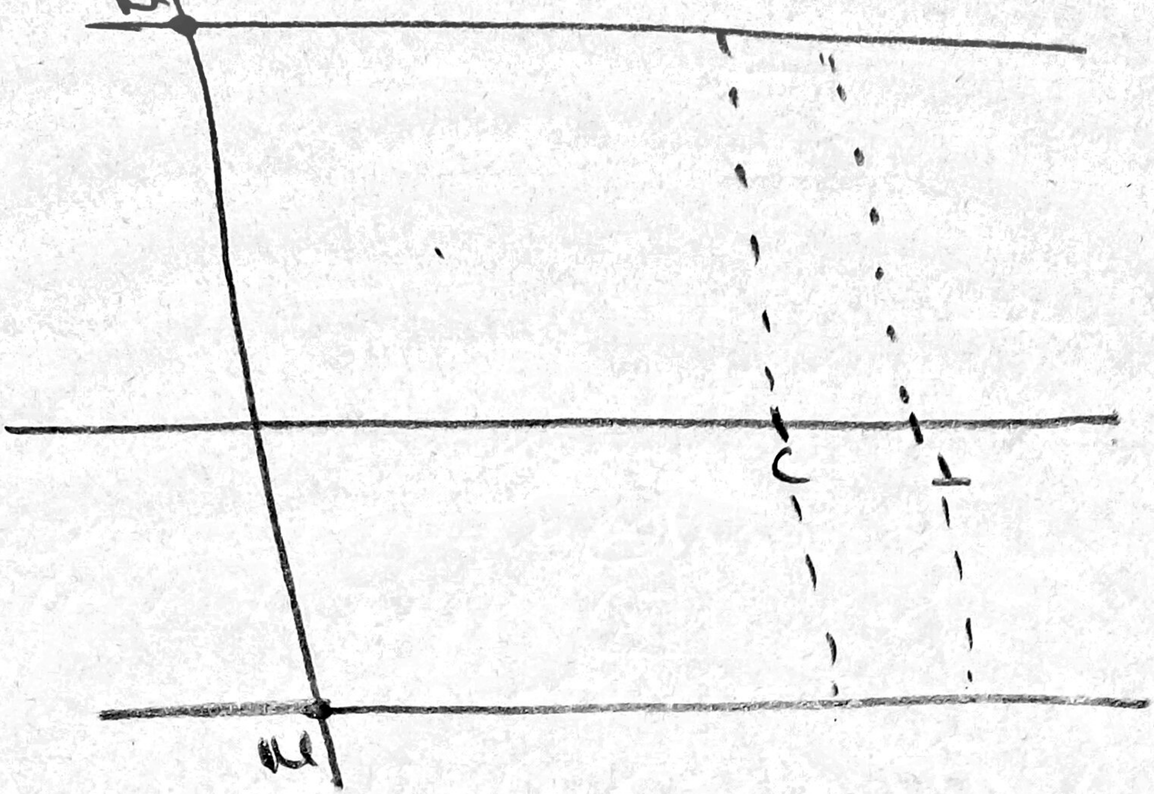
* Η άσκηση είναι "παρόμοια" με την άσκηση 2 καθώς και με άλλα παραδείγματα που έχουν δοθεί - "καθεί" μέσα στο τμήμα, γι' αυτό δεν θα την κάνουμε.

Άσκηση 4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένη ώστε $\forall c\in(0,1)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,c]$.

Να δο: η f είναι ολοκλ. στο $[0,1]$.

Λύση

$\Downarrow$.



Επειδή η f φραγμένη $\exists\, M>0 : |f(x)| \leq M, \ \forall x \in [0,1]$

$$-M \leq f(x) \leq M$$

Έστω $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $c \in (0,1)$ ώστε: $2M(1-c) < \frac{\varepsilon}{2}$

(υπάρχει τέτοιο c, διότι $\lim_{c \to 1} 2M(1-c) = 0$)

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,c]$ από το κριτήριο Riemann $\exists$ διαμέριση

$P = \{ \underset{0}{x_0} < x_1 < x_2 < \dots < \underset{c}{x_n} \}$ του $[0,c]$

ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon/2$.

Θεωρώ την διαμέριση $P' = \{ \underset{0}{x_0} < x_1 < \dots < \underset{c}{x_n} < \underset{1}{x_{n+1}} \}$

του $[0,1]$

$M_{n+1} = \sup\{ f(t), t \in [x_n, x_{n+1}] \} \leq M$

$m_{n+1} = \inf\{ f(t), t \in [x_n, x_{n+1}] \} \geq -M$.

Έτσι $U(f,P') - L(f,P') =$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n+1} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + M_{n+1}(1-c) - m_{n+1}(1-c)$$

$$\leq U(f,P) - L(f,P) + (M_{n+1} - m_{n+1})(1-c)$$

$$\leq U(f,P) - L(f,P) + 2M(1-c)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Άσκηση 5</u>)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη η οποία είναι συνεχής παντού εκτός ενός $c \in [a,b]$. Να δ.ο: η f είναι ολοκληρώσιμη.

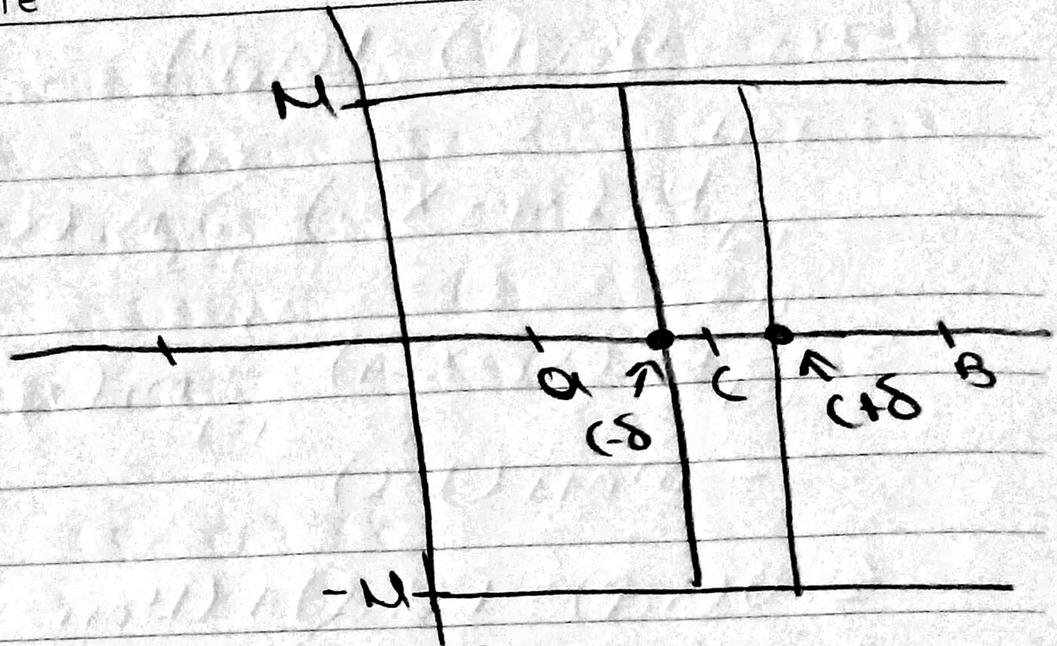
<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε ότι $a<c<b$

(η απόδ. αν $c=a$ ή $c=b$ είναι παρόμοια)

f φραγμ. $\Rightarrow \exists M>0 : -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$

Έστω $\varepsilon > 0$



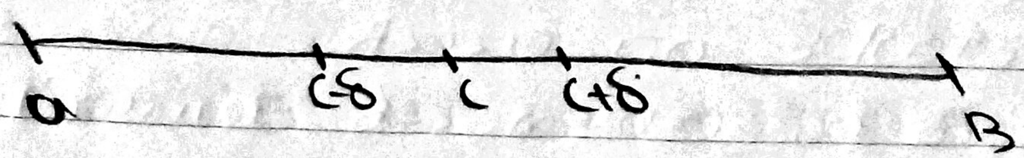
Επιλέγω $\delta > 0$ ώστε $4M\delta < \varepsilon/3$ και

$\delta < c - \alpha$

$\delta < \beta - c$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, c-\delta]$ θα είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό.
Άρα από κριτήριο Riemann θα
$\exists$ διαμέριση P, ώστε $U(f_{[\alpha, c-\delta]}, P) - L(f_{[\alpha, c-\delta]}, P) < \frac{\varepsilon}{3}$

Ομοίως $\exists$ διαμέριση Q του $[c+\delta, \beta]$ ώστε
$U(f_{[c+\delta, \beta]}, Q) - L(f_{[c+\delta, \beta]}, Q) < \varepsilon/3$



Η $P \cup Q$ είναι διαμέριση του $[\alpha, \beta]$

Έστω $P \cup Q = \{x_0 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_m\}$, όπου $x_0 = a$, $x_n = c-\delta$, $x_{n+1} = c+\delta$, $x_m = b$.

$$U(f, P\cup Q) - L(f, P \cup Q) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + (M_{n+1} - m_{n+1}) \cdot$$

$$\cdot \left((c+\delta) - (c-\delta)\right) + \sum_{i=n+1}^{m} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq U(f|_{[a,c-\delta]}, P) - L(f|_{[a,c-\delta]}, P) + 4M\delta + U(f|_{[c+\delta,b]}, Q) - L(f|_{[c+\delta,b]}, Q)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση: Με όμοια απόδειξη αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με πεπερασμένα το πλήθος ασυνέχειες τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \\ \frac{1}{n} & \end{cases}$$

αν x ρητός: με $x = \frac{m}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $m = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\text{ΜΚΔ}(m,n) = 1$.

* Η f όπως είδαμε από τον ΑηΙ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό.

NO DATE

Η f είναι ολοκληρώσιμη. Απόδειξ. το εξής:

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $A(f)$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f.

Η f είναι ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ (a_n,b_n) ανοιχ. διαστ. $A(f)\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$

και $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon$.

Άσκηση 6)

Η συναρτ. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$

Να δ.ο: $\int_a^b f(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$

Λύση

$\Leftarrow$) Προφανές

$\Rightarrow$) Αρκεί (αντιθετοαντιστροφή) νδο αν $\exists$ $x_0\in[a,b]$: $f(x_0)>0$ τότε $\int_a^b f(x)dx>0$.

Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος.

(Η αποδ. είναι παρόμοια αν $x_0=a$, $x=b$)

υπάρχει $\delta>0$ με $0<\min\{x_0-a, b-x_0\}$, ώστε $\forall$ $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ να ισχύει:

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$.

$\Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)$

$\Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

NO DATE

Συνεπώς $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx.$

$$\geq 0 + \frac{f(x_0)}{2}\left((x_0+\delta)-(x_0-\delta)\right) + 0$$

$$= f(x_0)\cdot\delta > 0.$$

Άσκηση 7)

α) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

αφού: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

β) $\int \sin^5 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x\,dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = \cos x$.

$dy = -\sin x\,dx$, αντικαθιστώ στο

$$I' = -\int (1-y^2)^2\,dy$$

$$= -\int (y^4 - 2y^2 + 1)\,dy$$

$$= -\frac{y^5}{5} + \frac{2}{3}y^3 - y + C.$$

Επομένως $I = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$